**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014**

# AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato IX


Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tutori: A. Mazzoccoli, M. Nanni


## SOLUZIONI

Esercizio 1. Si dimostri, applicando i limiti notevoli visti a lezione che:

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

e usare tali risultati per provare che:

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \qquad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

Dimostriamo le prime due:

$$\circ \lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} x = 0.$$

$$\circ \lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \cos x + 1 - 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot x^2 + 1 = 1.$$

Utilizziamole per provare le altre due:

$$\circ \lim_{x\to x_0} \sin x =_{y=x-x_0} \lim_{y\to 0} \sin(y + x_0) = \lim_{y\to 0}(\sin y \cos x_0 + \cos y \sin x_0) = \sin x_0$$

$$\circ \lim_{x\to x_0} \cos x =_{y=x-x0} \lim_{y\to 0} \cos(y + x_0) = \lim_{y\to 0}(\cos y \cos x_0 - \sin y \sin x_0) = \cos x_0.$$

Esercizio 2. Si dimostri applicando quanto visto per le successioni, che:

$$e^x \to +\infty, \quad x \to +\infty \qquad e^x \to 0, \quad x \to -\infty$$

Semplicemente, considerando $M > 0$ se $x \geq M$ allora $\forall x \geq n$ si avrà che $e^x \geq e^n \geq M'$. Allo stesso modo, se $x \geq M$ allora, $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall x \geq n$ si avrà che $e^{-x} \leq e^{-n} \leq \varepsilon$.

Esercizio 3. Si dimostrino, applicando l'esercizio precedente e sapendo che $e^{\alpha_n} \to e^{\alpha}$ se $\alpha_n \to \alpha$, le seguenti:

$$\ln x \to +\infty, \quad x \to +\infty \qquad \ln x \to -\infty \quad x \to 0^+$$

Supponiamo per assurdo che:

$$x \to +\infty \Rightarrow \ln x \to l,$$

dove $l$ è un valore finito. Allora, applicando la proprietà scritta nell'intestazione dell'esercizio, avremmo:

$$\ln x \to l \Leftrightarrow e^{\ln x} \to e^l \Leftrightarrow x \to e^l$$

Ma questo è assurdo perché avevamo supposto $x \to +\infty$. Allo stesso modo, per assurdo:

$$x \to 0^+ \Rightarrow \ln x \to -l$$

con $l$ valore finito. Applicando la proprietà:

$$\ln x \to -l \Leftrightarrow e^{\ln x} \to e^{-l} \Leftrightarrow x \to \frac{1}{e^l}$$

Ma questo è assurdo perché avevamo supposto $x \to 0^+$.

<u>Esercizio 4.</u> Si calcolino i seguenti limiti.

$$\circ \lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(x^2-3x+4)}{x\cdot(x^4-1)} = -4.$$

$$\circ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x}{2x^3-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\cdot(1-\frac{3}{x^2})}{x^3\cdot(2-\frac{1}{x})} = \frac{1}{2}$$

$$\circ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\circ \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{2+x^3} - \sqrt[3]{1+2x^2+x^3}) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{2+x^3}-\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}) \frac{\sqrt[3]{(2+x^3)^2}+\sqrt[3]{(1+2x^2+x^3)^2}+\sqrt[3]{(2+x^3)(1+2x^2+x^3)}}{\sqrt[3]{(2+x^3)^2}+\sqrt[3]{(1+2x^2+x^3)^2}+\sqrt[3]{(2+x^3)(1+2x^2+x^3)}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+1}{\sqrt[3]{(2+x^3)^2}+\sqrt[3]{(1+2x^2+x^3)^2}+\sqrt[3]{(2+x^3)(1+2x^2+x^3)}} = -\frac{2}{3}$$

$$\circ \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5} = 2\sqrt{5}.$$

<u>Esercizio 5.</u> Si calcolino i seguenti limiti, tenendo a mente i limiti notevoli visti a lezione.

$$\circ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2 \cos x} = \frac{1}{2}.$$

$$\circ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} =_{y=x-\frac{\pi}{2}} \lim_{y\to 0} \frac{\cos(y+\frac{\pi}{2})}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos y \cos\frac{\pi}{2} - \sin y \sin\frac{\pi}{2}}{y} = -1.$$

$$\circ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x^2)}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{1-\cos x}{x^2}) + 2\ln x}{\ln x} = 2.$$

$$\circ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{|\sin x|}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{|\sin x|}{x}\right)} = 0.$$

$$\circ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x} \cdot \frac{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x}{\sin x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\tan x})} = 1.$$

$$\circ \lim_{x\to 0} \frac{\cos\frac{\pi(1-x)}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Esercizio 6.</u> Studiare i limiti destro e sinistro delle seguenti funzioni nel punto richiesto. Per quali di esse i limiti sono uguali?

$$\circ f(x) = [\ln x], \quad x = e$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to e^+} f(x)$$

$$\circ g(x) = \frac{1}{x}, \quad x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x\to 0^+} g(x)$$

$$h(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \leq 1 \\ -\ln x & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} (x-1)^2 = 1 = \lim_{x\to 1^+} -\ln x$$

$$i(x) = \begin{cases} -\sqrt{|x|} & x \leq 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} -\sqrt{|x|} = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} e^x$$